Anàlisi Real i Funcional

Espais de Hilbert, sèries de Fourier i teoria espectral

43. Demostreu que si $p \neq 2$, aleshores $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ no és un espai de Hilbert.

44. Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial E. Siguin $x, y \in E$. Proveu que

(a) $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$ si, i només si, x, y són linealment dependents.

(b) $\langle x+y, x+y\rangle^{1/2} = \langle x, x\rangle^{1/2} + \langle y, y\rangle^{1/2}$ si, i només si, $y = 0$ o bé $x = \alpha y$ amb $\alpha \geq 0$.

45. Sigui H un espai de Hilbert, F un subespai de dimensió 1 i $0 \neq y \in F$. Demostreu que si $x \in H$,

$$d(x, F^{\perp}) = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|}.$$

Calculeu la distància de $g(x) = x^2$ al subespai

$$\left\{ f \in L^2([0,1]) : \int_0^1 x f(x) = 0 \right\}$$

en $L^2([0,1])$.

46. Fent servir les eines del curs, calculeu,

$$I = \min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x^2 - a - bx|^2 dx.$$

Per a quins valors $a, b \in \mathbb{R}$ s'assoleix?

47. Calculeu

$$I = \min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx.$$

Trobeu també

$$\max \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} x^3 g(x) dx : g \in L^2([-\pi, \pi]), \|g\|_2 = 1, \int_{-\pi}^{\pi} x^k g(x) dx = 0 \text{ per } k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Per a quines funcions g s'assoleix aquest màxim?

48. Sigui $H = L^2([-1,1])$ i $g(x) = |x|$.

(a) Demostreu que, si F és el subespai generat per $\{1, x\}$, aleshores

$$F^{\perp} = \left\{ f \in H : \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0 \right\}$$

és un subespai tancat de H de dimensió infinita.

(b) Calculeu les distàncies de g a F i $F^{\perp}$.

(c) Si no ho heu fet a l'apartat (b), trobeu una base ortonormal d'F i observeu que podem calcular $P_F(g)$ a partir d'ella.

49. Sigui $\{e_n\}_n$ un sistema ortonormal complet de $L^2([0,1])$ sobre els reals. Demostreu que

$$\sum_{n\geq 1} \left| \int_0^x e_n(t)dt \right|^2 = x, \quad \forall x \in [0,1].$$

50. Sigui $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(t) = \frac{t}{2}$. Calculeu la seva sèrie de Fourier i deduïu que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{i} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Feu servir el sistema ortonormal complet $\left\{ \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $L^2([-\pi, \pi])$.

51. Definim la funció

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-\pi, 0) \\ 2016 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Calculeu la seva sèrie de Fourier i trobeu el valor de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

52. Sigui H un espai de Hilbert.

(a) Proveu que si $T \in \mathcal{L}(H)$ és de rang finit (és a dir, $T(H)$ té dimensió finita), aleshores T és compacte.

(b) Deduïu que tot operador $T \in \mathcal{L}(H)$ que és límit (en $\mathcal{L}(H)$) d'operadors compactes és compacte.

53. Recuperem l'operador del problema 38, on fixàvem $z \in \ell^\infty$ i definíem

$$T_z x = T_z(\{x_n\}_n) = \{z_n x_n\}_n.$$

Vam provar que T_z era lineal i acotat de ℓ^2 en ℓ^2 amb $\|T_z\|_{\ell^2 \to \ell^2} = \|z\|_\infty$. Suposem ara, a més, que $z_n \in \mathbb{R}$ per a tota $n \geq 1$. Aleshores:

(a) Demostreu que T_z és autoadjunt.

(b) Proveu que $EV(T_z) = \{z_n\}_n$.

(c) Proveu que T_z és compacte si i només si $\lim_n z_n = 0$.
Indicació: Feu servir el problema anterior.

54. Sigui $\{e_n\}_n$ una base hilbertiana d'un espai de Hilbert H. Demostreu que:

(a) Existeix un únic operador lineal i acotat $T : H \to H$ tal que

$$Te_n = e_n + e_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) T no té valors propis.

(c) $B_{\mathbb{C}}(1,1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1| \leq 1\} \subseteq \sigma(T)$.

(d) És T un operador compacte?

55. Sigui $T : L^2([0,\pi/2]) \to L^2([0,\pi/2])$ l'operador de Hilbert-Schmidt amb nucli integral $K(x,y) = \sin(x+y) \in L^2([0,\pi/2]^2)$. És a dir

$$Tf(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) f(y)dy, \quad f \in L^2([0,\pi/2]).$$

Sabem que aquest operador és lineal i acotat.

(a) Trobeu una base de la imatge $T(L^2([0,\pi/2]))$.

(b) És T compacte? És autoadjunt?

(c) Trobeu els valors propis de T i deduïu que

$$L^2([0,\pi/2]) = \langle \cos x + \sin x \rangle \oplus \langle \cos x - \sin x \rangle \oplus \langle \cos x, \sin x \rangle^\perp.$$

56. BONUS: Un cas del problema del subespai invariant. Sigui $(H, \|\cdot\|)$ un espai de Hilbert de dimensió infinita. Donat un operador lineal i acotat $T \in \mathcal{L}(H)$, direm que un subespai $F \subseteq H$ és invariant si $T(F) \subseteq F$. A $F = \{0\}$ i $F = H$ se'ls anomena *subespais invariants trivials*. D'aquesta manera, direm que T *no té subespais invariants no trivials* si, per a tot $F \subseteq H$ tancat i invariant, es té

$$F = \{0\} \quad \text{o bé} \quad F = H.$$

També, donat un element $x \in H$, direm que x és *cíclic* si

$$\mathcal{O}_T(x) = \overline{\langle x, Tx, T^2x, ...\rangle} = H.$$

Suposem que T és compacte. Aleshores:

(a) Proveu que $T \in \mathcal{L}(H)$ no té subespais invariants no trivials si, i només si, tot element $x \in H$ no nul és cíclic.

(b) Proveu que si $T \in \mathcal{L}(H)$ no té subespais invariants no trivials, aleshores $EV(T) = \emptyset$.

(c) La fórmula de Gelfand afirma que

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|_{H\to H}^{\frac{1}{n}} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\},$$

on el suprem de la dreta s'anomena *radi espectral*. Feu servir aquesta igualtat per demostrar que si $T \in \mathcal{L}(H)$ no té subespais invariants no trivials, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|_{H\to H}^{\frac{1}{n}} = 0.$$

(d) **Conclusió:** Demostreu que tot operador $T \in \mathcal{L}(H)$ compacte té un subespai invariant no trivial. Podeu suposar sense pèrdua de generalitat que $T \neq 0$ i $\|T\|_{H\to H} = 1$. Procediu per reducció a l'absurd tot suposant que T no té subespais invariants no trivials. Podeu fer servir els següents passos com a guia:

- Fixeu-vos que podeu prendre un element $x_0 \in H$ tal que $\|x_0\| > 1$ i $\|Tx_0\| > 1$. Construïu la bola oberta

$$B_0 = \{x \in H : \|x - x_0\| < 1\}$$

i comproveu que $0 \notin \overline{B_0}$ i $0 \notin \overline{T(B_0)}$.

- Feu servir (a) per veure que, per a tot $x \neq 0$,

$$x \in U_x = \{z \in H : \|S_x(z) - x_0\| < 1\}$$

on S_x és un cert operador de la forma

$$S_x = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k T^k.$$

Observeu que U_x és obert i que S_x commuta amb T, és a dir, $S_x T = T S_x$.

- Recobriu $\overline{T(B_0)}$ per oberts $U_1, ..., U_s$.
- Començant amb x_0 i fent servir el recobriment anterior, definiu recursivament una successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ d'elements de B_0 que convergeixin a zero i arribareu a una contradicció.