

Conjuntos atractivos en ciertos sistemas triangulares

Sara Costa Romero

(en colaboración con Ll. Alsedà)

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Seminario informal UB, 5-III-2009

Ejemplo GOPY

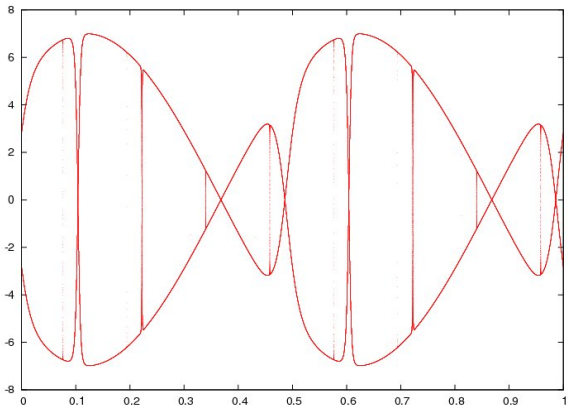
$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \rho \pmod{1} \\ x_{n+1} = 2\sigma \cos(2\pi\theta_n) \tanh(x_n) \end{cases}$$

con ρ irracional.

Ejemplo GOPY

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \rho \pmod{1} \\ x_{n+1} = 2\sigma \cos(2\pi\theta_n) \tanh(x_n) \end{cases}$$

con ρ irracional.



Modelos de Keller y Haro

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \rho \pmod{1} \\ x_{n+1} = g(\theta_n)f(x_n) \end{cases} \quad (1)$$

cuando ρ es irracional, $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ es continua y log-integrable, y $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es \mathcal{C}^1 , estrictamente creciente, $f(0) = 0$ y f' es estrictamente decreciente.

Modelos de Keller y Haro

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \rho \pmod{1} \\ x_{n+1} = g(\theta_n)f(x_n) \end{cases} \quad (1)$$

cuando ρ es irracional, $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ es continua y log-integrable, y $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es \mathcal{C}^1 , estrictamente creciente, $f(0) = 0$ y f' es estrictamente decreciente.

- Modelo Keller: f acotada, $f'(0) \in \mathbb{R}$ y
- Modelo Haro: f no necesariamente acotada, $f'(0) = \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f'(x)x}{f(x)} < 1$$



[Kel] G. Keller, *A note on strange nonchaotic attractors*, Fund. Math., **151** (1996), no. 2, 139–148.



[Haro] A. Haro, *On strange attractors in a class of pinched skew products*, Preprint.

Inciso

Exponentes de Lyapunov para sistemas triangulares dos dimensionales

El **exponente de Lyapunov vertical** en el punto z viene dado por

$$\lambda(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\partial x_n}{\partial x} \right|.$$

Exponentes de Lyapunov para sistemas triangulares dos dimensionales

El **exponente de Lyapunov vertical** en el punto z viene dado por

$$\lambda(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\partial x_n}{\partial x} \right|.$$

Si μ es una medida T -ergódica.

Por los teoremas de Oseledec y Ergódico de Birkhoff, para μ -c.t. punto $z = (\theta, x)^t \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ los dos exponentes de Lyapunov son:

$$\lambda(z) = \int_{\mathbb{S}^1} \log |g| \, dm + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(x_k)|,$$

y

$$\bar{\lambda}((\theta, x)^t) = \int_{\mathbb{S}^1} \log |R'| \, dm,$$

siendo m la medida R -ergódica.

Medidas invariantes y ergódicas

Una medida de probabilidad μ es T -invariante si,

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \quad \forall A$$

Y es T -ergódica si $\mu(A) \in \{0, 1\}$ para todo A tal que $T^{-1}(A) = A$.

Medidas invariantes y ergódicas

Una medida de probabilidad μ es T -invariante si,

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \quad \forall A$$

Y es T -ergódica si $\mu(A) \in \{0, 1\}$ para todo A tal que $T^{-1}(A) = A$.

Si μ y ν son dos medidas T -ergódica, entonces $\mu(\text{Sop}(\nu)) = 0$ y vice-versa.

Fin inciso

Teorema de Keller y Haro

Teorema

Para el sistema (1) existe una función semicontinua superiormente

$$\varphi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow [0, \infty)$$

cuyo grafo es invariante y verifica:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k - \varphi(\theta_k)| = 0$ para c.t $\theta \in \mathbb{S}^1$ y todo $x > 0$, cuando m es la medida de Haar-Lebesgue de \mathbb{S}^1 .
- La medida de Lebesgue del círculo, levantada al grafo de φ es una medida de Sinai-Ruelle-Bowen; es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(T^n(\theta, x)^t) = \int_{\mathbb{S}^1} h \circ T \, dm$$

siendo h una función de clase \mathcal{C}^0 .

Teorema de Keller y Haro

Teorema [Kel]

Para el sistema (1) existe una función semicontinua superiormente $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ cuyo grafo es invariante y verifica:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k - \varphi(\theta_k)| = 0$ para c.t $\theta \in \mathbb{S}^1$ y todo $x > 0$, cuando m es la medida de Haar-Lebesgue de \mathbb{S}^1 .
- La medida de Lebesgue del círculo, levantada al grafo de φ es una medida de Sinai-Ruelle-Bowen.

Teorema de Keller y Haro

Teorema [Kel]

Para el sistema (1) existe una función semicontinua superiormente $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ cuyo grafo es invariante y verifica:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k - \varphi(\theta_k)| = 0$ para c.t $\theta \in \mathbb{S}^1$ y todo $x > 0$, cuando m es la medida de Haar-Lebesgue de \mathbb{S}^1 .
- La medida de Lebesgue del círculo, levantada al grafo de φ es una medida de Sinai-Ruelle-Bowen.
- Si $\sigma := f'(0) \exp\left(\int_{\mathbb{S}^1} \log g(\theta) d\theta\right) > 1$, entonces $\varphi \equiv 0$ y $\lambda(\theta, x) = \lambda_\varphi = \log \sigma$ para m -c.t. $\theta \in \mathbb{S}^1$ y cada $x \geq 0$.

Teorema de Keller y Haro

Teorema [Kel]

Para el sistema (1) existe una función semicontinua superiormente $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ cuyo grafo es invariante y verifica:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k - \varphi(\theta_k)| = 0$ para c.t $\theta \in \mathbb{S}^1$ y todo $x > 0$, cuando m es la medida de Haar-Lebesgue de \mathbb{S}^1 .
- La medida de Lebesgue del círculo, levantada al grafo de φ es una medida de Sinai-Ruelle-Bowen.
- Si $\sigma := f'(0) \exp\left(\int_{\mathbb{S}^1} \log g(\theta) d\theta\right) > 1$, entonces $\varphi \equiv 0$ y $\lambda(\theta, x) = \lambda_\varphi = \log \sigma$ para m -c.t. $\theta \in \mathbb{S}^1$ y cada $x \geq 0$.
- Si $\sigma > 1$, entonces $\lambda(\theta, x) = \lambda_\varphi < 0$ para m -c.t. y todo $x > 0$. El conjunto $\{\theta : \varphi(\theta) > 0\}$ tiene medida de Lebesgue total.

Teorema de Keller y Haro

Teorema [Kel]

Para el sistema (1) existe una función semicontinua superiormente $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ cuyo grafo es invariante y verifica:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k - \varphi(\theta_k)| = 0$ para c.t. $\theta \in \mathbb{S}^1$ y todo $x > 0$, cuando m es la medida de Haar-Lebesgue de \mathbb{S}^1 .
- La medida de Lebesgue del círculo, levantada al grafo de φ es una medida de Sinai-Ruelle-Bowen.
- Si $\sigma := f'(0) \exp\left(\int_{\mathbb{S}^1} \log g(\theta) d\theta\right) > 1$, entonces $\varphi \equiv 0$ y $\lambda(\theta, x) = \lambda_\varphi = \log \sigma$ para m -c.t. $\theta \in \mathbb{S}^1$ y cada $x \geq 0$.
- Si $\sigma > 1$, entonces $\lambda(\theta, x) = \lambda_\varphi < 0$ para m -c.t. y todo $x > 0$. El conjunto $\{\theta : \varphi(\theta) > 0\}$ tiene medida de Lebesgue total. Además
 - si $g(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$, entonces $\varphi(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$. En este caso φ es continua y si g es \mathcal{C}^1 , entonces φ es \mathcal{C}^1 .

Teorema de Keller y Haro

Teorema [Kel]

Para el sistema (1) existe una función semicontinua superiormente $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ cuyo grafo es invariante y verifica:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k - \varphi(\theta_k)| = 0$ para c.t $\theta \in \mathbb{S}^1$ y todo $x > 0$, cuando m es la medida de Haar-Lebesgue de \mathbb{S}^1 .
- La medida de Lebesgue del círculo, levantada al grafo de φ es una medida de Sinai-Ruelle-Bowen.
- Si $\sigma := f'(0) \exp\left(\int_{\mathbb{S}^1} \log g(\theta) d\theta\right) > 1$, entonces $\varphi \equiv 0$ y $\lambda(\theta, x) = \lambda_\varphi = \log \sigma$ para m -c.t. $\theta \in \mathbb{S}^1$ y cada $x \geq 0$.
- Si $\sigma > 1$, entonces $\lambda(\theta, x) = \lambda_\varphi < 0$ para m -c.t. y todo $x > 0$. El conjunto $\{\theta : \varphi(\theta) > 0\}$ tiene medida de Lebesgue total.

Además

- si $g(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$, entonces $\varphi(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$. En este caso φ es continua y si g es \mathcal{C}^1 , entonces φ es \mathcal{C}^1 .
- Si existe $\hat{\theta} \in \mathbb{S}^1$ de manera que $g(\hat{\theta}) = 0$, entonces el conjunto $\{\theta : \varphi(\theta) > 0\}$ es "magro" y φ es discontinua en m -c.t. punto

Conjunto *atractivo*

Digo que el grafo de una aplicación o correspondencia ϕ es atractivo para un sistema triangular dos dimensional si:

- es positivamente invariante
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \phi(\theta_n)| = 0$ para m -c.t θ y un conjunto de medida de Lebesgue positiva de x en cada fibra $\{\theta\} \times \mathbb{R}$.

Modelo de Alsedà y Misiurewicz

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \rho \pmod{1} \\ x_{n+1} = g(\theta_n)f(x_n) \end{cases} \quad (2)$$

cuando ρ es irracional, $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ es continua y log-integrable, y $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es C^1 , unimodal, $f(0) = 0 = f'(1)$ y f' es estrictamente decreciente.

Modelo de Alsedà y Misiurewicz

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \rho \pmod{1} \\ x_{n+1} = g(\theta_n)f(x_n) \end{cases} \quad (2)$$

cuando ρ es irracional, $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, \infty)$ es continua y log-integrable, y $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es \mathcal{C}^1 , unimodal, $f(0) = 0 = f'(1)$ y f' es estrictamente decreciente.

Añadiendo alguna hipótesis adicional, demostraron un resultado muy parecido al de Keller.

La función que da el atractor se define en CASI TODO PUNTO de la base, y para el resto, la definen como 0 (ojo con la invariancia)



[L-M] LI. Alsedà y M. Misiurewicz. *Attractors for unimodal quasiperiodically forced maps*, J. Difference Equ. Appl, **14** (2008), no. 10, 1175–1196.

Nuestro objetivo

Extender los resultados de Keller, Haro y Alsedà y Misiurewicz al caso

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = R(\theta_n) \\ x_{n+1} = g(\theta_n)f(x_n) \end{cases} \quad (3)$$

cuando

- $R : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua del círculo de grado 1 sin puntos periódicos
- $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y log-integrable
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 (en $\overline{\mathbb{R}}$), estrictamente creciente, $f(0) = 0$, y $f'|_{(-\infty,0)}$ estrictamente creciente, y $f'|_{(0,\infty)}$ estrictamente decreciente.

Nuestro objetivo

Extender los resultados de Keller, Haro y Alsedà y Misiurewicz al caso

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = R(\theta_n) \\ x_{n+1} = g(\theta_n)f(x_n) \end{cases} \quad (3)$$

cuando

- $R : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua del círculo de grado 1 sin puntos periódicos
- $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y log-integrable
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 (en $\overline{\mathbb{R}}$), estrictamente creciente, $f(0) = 0$, y $f'|_{(-\infty,0)}$ estrictamente creciente, y $f'|_{(0,\infty)}$ estrictamente decreciente.
 - si $f'(0) \in \mathbb{R}$, entonces f es acotada (en caso contrario necesitaríamos hipótesis extra)
 - si $f'(0) = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f'(x)x}{f(x)} < 1$

Nuestro objetivo

Extender los resultados de Keller, Haro y Alsedà y Misiurewicz al caso

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = R(\theta_n) \\ x_{n+1} = g(\theta_n)f(x_n) \end{cases} \quad (3)$$

cuando

- $R : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua del círculo de grado 1 sin puntos periódicos
- $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y log-integrable
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{C}^1 (en $\overline{\mathbb{R}}$), estrictamente creciente, $f(0) = 0$, y $f'|_{(-\infty, 0)}$ estrictamente creciente, y $f'|_{(0, \infty)}$ estrictamente decreciente.
 - si $f'(0) \in \mathbb{R}$, entonces f es acotada (en caso contrario necesitaríamos hipótesis extra)
 - si $f'(0) = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f'(x)x}{f(x)} < 1$

También nos interesa $f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ bimodal verificando $f(0) = f(\pm 1) = 0$ pero se complica toda la demostración mucho.

Aplicaciones del círculo: resumen de lo que nos interesa

Definición

$R : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continua

Una elevación (*lift*) suya es una aplicación $\widehat{R} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que hace que conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\widehat{R}} & \mathbb{R} \\ \downarrow \text{fr} & & \downarrow \text{fr} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{R} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

siendo $\text{fr}(x) = x - [x]$

Definición

$R : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continua

Una elevación (*lift*) suya es una aplicación $\widehat{R} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que hace que conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\widehat{R}} & \mathbb{R} \\ \downarrow \text{fr} & & \downarrow \text{fr} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{R} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

siendo $\text{fr}(x) = x - [x]$

El grado de R viene dado por $\text{grado}(R) = \widehat{R}(x+1) - \widehat{R}(x)$.

Números de rotación

Si $\text{grado}(R) = 1$ se define el número de rotación del punto $\theta \in \mathbb{S}^1$ como

$$\rho(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{R}^n(\theta) - \theta}{n}.$$

siendo \widehat{R} la única elevación tal que $\widehat{R}(0) \in [0, 1)$.

Números de rotación

Si $\text{grado}(R) = 1$ se define el número de rotación del punto $\theta \in \mathbb{S}^1$ como

$$\rho(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{R}^n(\theta) - \theta}{n}.$$

siendo \widehat{R} la única elevación tal que $\widehat{R}(0) \in [0, 1)$.

- 1 Si $\rho(\theta) \in \mathbb{Q}$, θ es un punto periódico
- 2 Si R es no decreciente el número de rotación está bien definido y es constante.
- 3 En general, el conjunto de distintos números de rotación de R es un intervalo cerrado no degenerado.
- 4 Si R no tiene puntos periódicos, entonces tiene un único número de rotación y es irracional.

Propiedades

Las aplicaciones continuas sin puntos periódicos son ÚNICAMENTE ergódicas.

Denotaremos su soporte por \mathcal{P} .

- Es positivamente invariante
- Para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$, $\omega(\theta) = \mathcal{P}$.
- En \mathcal{P} las órbitas se comportan como las rotaciones irracionales.

Clasificación y soportes

- Rotación irracional $\mathcal{P} = \mathbb{S}^1$ e invariante y m Lebesgue
- Conjugada a una rotación irracional $\mathcal{P} = \mathbb{S}^1$ e invariante y m equivalente a Lebesgue
- Semiconjugada a una rotación \mathcal{P} es *raro*¹ (nowhere dense): el interior de la clausura es el vacío. Tiene medida de Lebesgue 0.
 - Contraejemplo de Denjoy (R homeomorfismo) \mathcal{P} invariante y perfecto
 - No decreciente
 - General

¹nomenclatura usada por los de Valladolid

Cómo es este conjunto \mathcal{P}

Para cada θ definimos J_θ como el mayor conjunto cerrado que contiene a θ pero a ninguno de sus iterados (para delante)

Cómo es este conjunto \mathcal{P}

Para cada θ definimos J_θ como el mayor conjunto cerrado que contiene a θ pero a ninguno de sus iterados (para delante)
 \mathcal{P} es la unión de los extremos de dichos intervalos.

Esta notación y los resultados al respecto están extraídos de:



[AK] J. Auslander e Y.Katznelson, *Continuous maps of the circle without periodic points*, Israel J. Math., **32** (1979), no. 4, 375–381.

Propiedades J_θ

- Los intervalos $R^n(J_\theta) = J_{R^n(\theta)}$ son disjuntos 2 a 2.

Propiedades J_θ

- Los intervalos $R^n(J_\theta) = J_{R^n(\theta)}$ son disjuntos 2 a 2.
- Los extremos van a extremos, y los intervalos a intervalos:
Si θ' es un extremo de J_θ , entonces $R(\theta')$ es un extremo de $R(J_\theta) = J_{R(\theta)}$.

Propiedades J_θ

- Los intervalos $R^n(J_\theta) = J_{R^n(\theta)}$ son disjuntos 2 a 2.
- Los extremos van a extremos, y los intervalos a intervalos:
Si θ' es un extremo de J_θ , entonces $R(\theta')$ es un extremo de $R(J_\theta) = J_{R(\theta)}$.
- Si $R(\theta) = R(\theta')$, entonces $J_\theta = J_{\theta'}$
- Si $\theta' \neq \theta$, entonces o bien $J_\theta = J_{\theta'}$ o bien $J_\theta \cap J_{\theta'} = \emptyset$

Propiedades J_θ

- Los intervalos $R^n(J_\theta) = J_{R^n(\theta)}$ son disjuntos 2 a 2.
- Los extremos van a extremos, y los intervalos a intervalos:
Si θ' es un extremo de J_θ , entonces $R(\theta')$ es un extremo de $R(J_\theta) = J_{R(\theta)}$.
- Si $R(\theta) = R(\theta')$, entonces $J_\theta = J_{\theta'}$
- Si $\theta' \neq \theta$, entonces o bien $J_\theta = J_{\theta'}$ o bien $J_\theta \cap J_{\theta'} = \emptyset$
- Existe a lo sumo una cantidad numerable de intervalos J_θ no degenerados

Propiedades J_θ

- Los intervalos $R^n(J_\theta) = J_{R^n(\theta)}$ son disjuntos 2 a 2.
- Los extremos van a extremos, y los intervalos a intervalos:
Si θ' es un extremo de J_θ , entonces $R(\theta')$ es un extremo de $R(J_\theta) = J_{R(\theta)}$.
- Si $R(\theta) = R(\theta')$, entonces $J_\theta = J_{\theta'}$
- Si $\theta' \neq \theta$, entonces o bien $J_\theta = J_{\theta'}$ o bien $J_\theta \cap J_{\theta'} = \emptyset$
- Existe a lo sumo una cantidad numerable de intervalos J_θ no degenerados
- Dado $\theta' \in \mathbb{S}^1$, no necesariamente distinto de θ , $\theta' \in \omega(\theta)$ si y sólo si θ' es un extremo de $J_{\theta'}$.

Además,

- si θ' es un extremo de J_θ no degenerado, para todo $\theta'' \in J_\theta$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(R^n(\theta'), R^n(\theta'')) = 0$

Además,

- si θ' es un extremo de J_θ no degenerado, para todo $\theta'' \in J_\theta$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(R^n(\theta'), R^n(\theta'')) = 0$
- para todo $\theta \in \mathcal{P}$, $\text{Card}(R^{-1}(\theta) \cap \mathcal{P}) = \{1, 2\}$. Siendo 2 para a lo sumo una cantidad numerable de $\theta \in \mathcal{P}$.

Además,

- si θ' es un extremo de J_θ no degenerado, para todo $\theta'' \in J_\theta$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(R^n(\theta'), R^n(\theta'')) = 0$
- para todo $\theta \in \mathcal{P}$, $\text{Card}(R^{-1}(\theta) \cap \mathcal{P}) = \{1, 2\}$. Siendo 2 para a lo sumo una cantidad numerable de $\theta \in \mathcal{P}$.
- existe a lo sumo un punto $\theta' \in \text{Orb}(\theta) \cup (\text{Orb}_-(\theta) \cap \mathcal{P})$ tal que $\text{Card}(R^{-1}(\theta') \cap \mathcal{P}) = 2$, donde $\text{Orb}_-(\theta)$ denota la órbita para atrás de θ .

Un conjunto invariante

El conjunto $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \setminus (\bigcup_{\theta \in \mathcal{P}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R^n(\theta))$ es positiva y negativamente invariante. ($\mathcal{P} = \{\theta \mid \text{Card}(R^{-1}(\theta) \cap \mathcal{P}) = 2\}$).

Un conjunto invariante

El conjunto $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \setminus (\bigcup_{\theta \in \mathcal{P}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R^n(\theta))$ es positiva y negativamente invariante. ($\mathcal{P} = \{\theta \mid \text{Card}(R^{-1}(\theta) \cap \mathcal{P}) = 2\}$).

$$\text{CI}(\tilde{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$$

Un conjunto invariante

El conjunto $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \setminus (\bigcup_{\theta \in \mathcal{P}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R^n(\theta))$ es positiva y negativamente invariante. ($\mathcal{P} = \{\theta \mid \text{Card}(R^{-1}(\theta) \cap \mathcal{P}) = 2\}$).

$$\text{Cl}(\tilde{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$$

Si R es una rotación irracional, o conjugado a una, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathbb{S}^1$.

Si R es un contraejemplo de Denjoy, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$.

Resultado Principal I

Bajo las hipótesis anteriores:

- 1 existe una correspondencia bivaluada $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\theta \longmapsto \{\varphi^+(\theta), \varphi^-(\theta)\}$$

que es T -invariante, siendo $\varphi^+ : \mathbb{S}^1 \longrightarrow [0, \infty)$ es semicontinua superiormente, y $\varphi^- : \mathbb{S}^1 \longrightarrow (-\infty, 0]$ semicontinua inferiormente, y $\mathcal{D} = \mathbb{S}^1$ si R es un homeomorfismo, y $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{P}}$ en caso contrario.

Resultado Principal I

Bajo las hipótesis anteriores:

- 1 existe una correspondencia bivaluada $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\theta \longmapsto \{\varphi^+(\theta), \varphi^-(\theta)\}$$

que es T -invariante, siendo $\varphi^+ : \mathbb{S}^1 \longrightarrow [0, \infty)$ es semicontinua superiormente, y $\varphi^- : \mathbb{S}^1 \longrightarrow (-\infty, 0]$ semicontinua inferiormente, y $\mathcal{D} = \mathbb{S}^1$ si R es un homeomorfismo, y $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{P}}$ en caso contrario.

- 2 Para $(\theta, x)^t \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,

$$|x_n - y_n| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

donde $y \in \varphi(\theta)$, y $x \cdot y \geq 0$.

Resultado Principal II

Denotamos por Λ el exponente de Lyapunov en $x \equiv 0$:

$$\Lambda := \log f'(0) + \int_{\mathbb{S}^1} \log |g| dm$$

si $f'(0) \in \mathbb{R}$, y en caso contrario $\Lambda = \infty$.

③ Dependiendo del signo de Λ pueden ocurrir 2 cosas:

Resultado Principal II

Denotamos por Λ el exponente de Lyapunov en $x \equiv 0$:

$$\Lambda := \log f'(0) + \int_{\mathbb{S}^1} \log |g| dm$$

si $f'(0) \in \mathbb{R}$, y en caso contrario $\Lambda = \infty$.

③ Dependiendo del signo de Λ pueden ocurrir 2 cosas:

- si $\Lambda < 0$, entonces $\varphi^+(\theta) = 0 = \varphi^-(\theta)$ para m -c.t.
- si $\Lambda > 0$, entonces $\varphi^+(\theta) \cdot \varphi^-(\theta) \neq 0$ para m -c.t.

En cuyo caso, $x \equiv 0$ es un repulsor.

Resultado Principal II

- 4 La medida R -ergódica m se puede elevar a una medida definida sobre el grafo de φ de la siguiente manera:

$$\mu(A) = \frac{1}{2}m(\pi_\theta(A \cap \text{grafo}(\varphi^+))) + \frac{1}{2}m(\pi_\theta(A \cap \text{grafo}(\varphi^-))).$$

Es una medida T invariante y su soporte es
 $\text{Sop}(\mu) = \text{Cl}(\varphi) \cap (\mathcal{P} \times \mathbb{R})$.

Resultado Principal III

- 5 Si μ es T -ergódica, entonces el grafo de φ es un conjunto *atractivo* minimal y si existe otro conjunto T -invariante D , $m(\Gamma \Delta D) = 0$.

Resultado Principal III

- 5 Si μ es T -ergódica, entonces el grafo de φ es un conjunto *atractivo* minimal y si existe otro conjunto T -invariante D , $m(\Gamma \Delta D) = 0$.
- 6 Si μ no es T -ergódica, el grafo de φ se divide en el grafo de dos APLICACIONES $\xi_1, \xi_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que
- sus grafos son T -invariantes y *atractivos* minimales
 - $\mu(\text{grafo}(\xi_1)) = \frac{1}{2} = \mu(\text{grafo}(\xi_2))$
 - $\mu(\text{Cl}(\text{grafo}(\xi_1)) \cap \text{Cl}(\text{grafo}(\xi_2))) = 0$

Resultado Principal IV

- 7 El exponente de Lyapunov vertical es negativo para todo $x \neq 0$ y m -c.t. θ .

Resultado Principal IV

- 7 El exponente de Lyapunov vertical es negativo para todo $x \neq 0$ y m -c.t. θ .

En particular

- Si μ es T -ergódica, para μ -c.t. $(\theta, x)^t$, el exponente de Lyapunov vertical viene dado por

$$\lambda := \int_{\mathbb{S}^1} \log |g| dm + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \log f' \circ \varphi^+ dm + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \log f' \circ \varphi^- dm$$

Resultado Principal IV

- 7 El exponente de Lyapunov vertical es negativo para todo $x \neq 0$ y m -c.t. θ .

En particular

- Si μ es T -ergódica, para μ -c.t. $(\theta, x)^t$, el exponente de Lyapunov vertical viene dado por

$$\lambda := \int_{\mathbb{S}^1} \log |g| dm + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \log f' \circ \varphi^+ dm + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \log f' \circ \varphi^- dm$$

- En caso contrario, μ no es T -ergódica, las medidas

$$\nu_1(D) = m(\pi_\theta(D \cap \text{grafo}(\xi_1))) \text{ y } \nu_2(D) = m(\pi_\theta(D \cap \text{grafo}(\xi_2)))$$

son T -ergódicas, y para ν_i -c.t. el exponente de Lyapunov vertical es

$$\lambda_i := \int_{\mathbb{S}^1} \log |g| dm + \int_{\mathbb{S}^1} \log f' \circ \xi_i dm.$$

Un par de ejemplos

Ejemplo 1

Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = R(\theta_n) \\ x_{n+1} = 7|\cos(2\pi\theta_n)|f(x_n) \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \tanh(x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\tanh(x-2)+\tanh(2)}{1-\tanh(2)^2} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Tiene dos atractores

Ejemplo 1

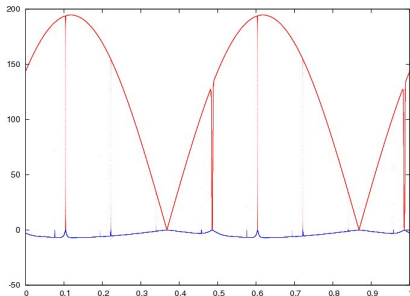
Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = R(\theta_n) \\ x_{n+1} = 7|\cos(2\pi\theta_n)|f(x_n) \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \tanh(x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\tanh(x-2)+\tanh(2)}{1-\tanh(2)^2} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Tiene dos atractores



Ejemplo 2

El sistema

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = R(\theta_n) \\ x_{n+1} = 7(\cos(2\pi\theta_n) - 2)f(x_n) \end{cases}$$

siendo

$$f(x) = \begin{cases} \tanh(x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\tanh(x-2) + \tanh(2)}{1 - \tanh(2)^2} & \text{en el otro caso.} \end{cases}$$

tiene un único atractor.

Ejemplo 2

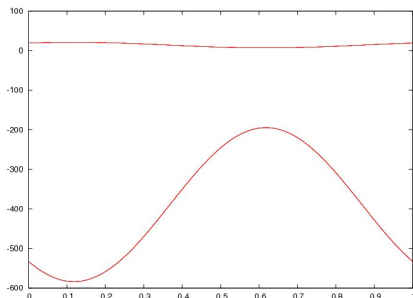
El sistema

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = R(\theta_n) \\ x_{n+1} = 7(\cos(2\pi\theta_n) - 2)f(x_n) \end{cases}$$

siendo

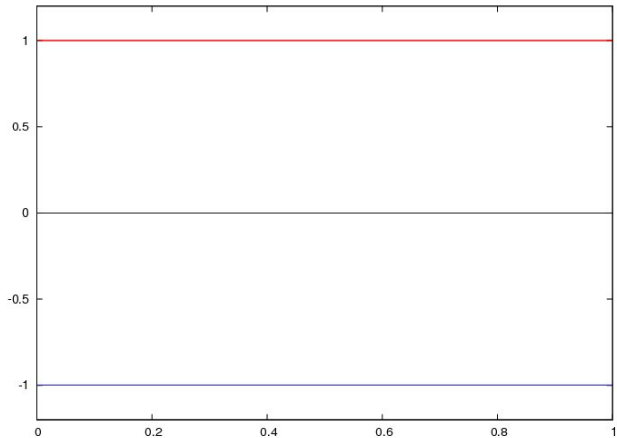
$$f(x) = \begin{cases} \tanh(x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\tanh(x-2) + \tanh(2)}{1 - \tanh(2)^2} & \text{en el otro caso.} \end{cases}$$

tiene un único atractor.

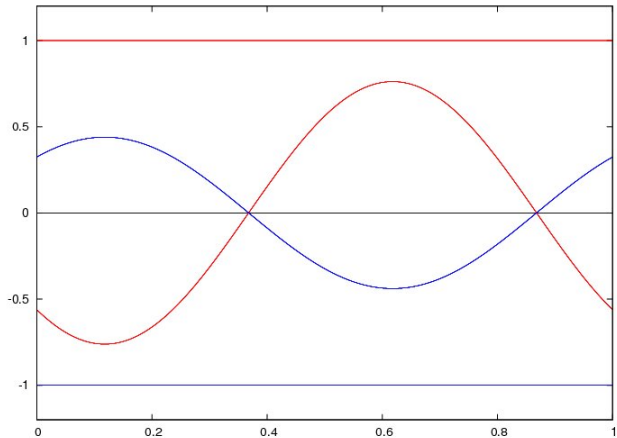


Esquema de la demostración

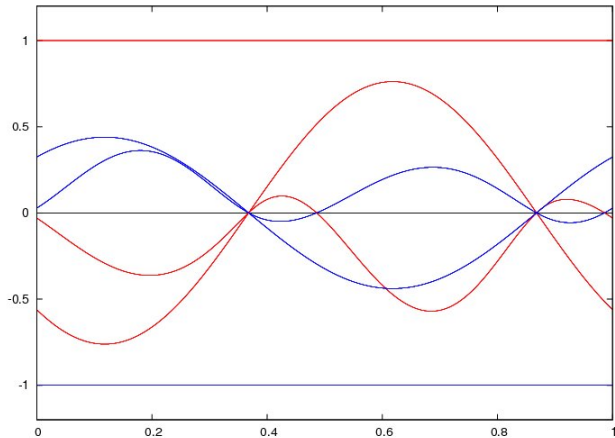
Construcción de φ^\pm



Construcción de φ^\pm



Construcción de φ^\pm



Resto de la demostración

Básicamente jugar con las propiedades geométricas de la función f

Caso Alsedà y Misiurewicz

Se un resultado totalmente análogo.

Caso Alsedà y Misiurewicz

Se un resultado totalmente análogo.

El primer paso de la demostración es encontrar φ^\pm .

Con ella se puede acotar la región donde se encuentra el grafo invariante.

Caso Alsedà y Misiurewicz

Se un resultado totalmente análogo.

El primer paso de la demostración es encontrar φ^\pm .

Con ella se puede acotar la región donde se encuentra el grafo invariante.

Encontrarlo pero sólo en \mathcal{D} .

Pequeñas sutilezas

- Dónde podemos iterar para atrás
- En dónde están definidas las funciones invariantes

Pequeñas sutilezas

- Dónde podemos iterar para atrás
- En dónde están definidas las funciones invariantes
- Una vez obtenida la invariancia para delante, buscarla para atrás.
- En cuántos puntos podemos asegurar que no se anula.

Pequeñas sutilezas

- Dónde podemos iterar para atrás
- En dónde están definidas las funciones invariantes
- Una vez obtenida la invariancia para delante, buscarla para atrás.
- En cuántos puntos podemos asegurar que no se anula.
- ¿Su clausura es verdaderamente un atractor (métrico)?
- ¿Qué pasa con los exponentes de Lyapunov fuera del grafo?

Pequeñas sutilezas

- Dónde podemos iterar para atrás
- En dónde están definidas las funciones invariantes
- Una vez obtenida la invariancia para delante, buscarla para atrás.
- En cuántos puntos podemos asegurar que no se anula.
- ¿Su clausura es verdaderamente un atractor (métrico)?
- ¿Qué pasa con los exponentes de Lyapunov fuera del grafo?
- ...