
Métodos intervalares de integración validada: aplicaciones a la mecánica celeste

DDAYS'08

El Escorial (Madrid), Octubre 22 – 24, 2008.

Elisa Maria Alessi Ariadna Farrés Arturo Vieiro

Àngel Jorba Carles Simó

Índice de contenidos:

- Determinación de la órbita de un asteroide (ej. Apophis)
 - ▶ Problema restringido de $N + 1$ -cuerpos.
 - ▶ Integrador Taylor+JPL.
 - ▶ Propagación de una región usando las ecuaciones variacionales.
- Integración validada de ecuaciones diferenciales
 - ▶ Métodos intervalares.
 - ▶ Aplicaciones al cálculo de la órbita de un asteroide (ej. Apophis).
 - ▶ Conclusiones.

Determinación de la órbita de un asteroide.

- Problema restringido de $N + 1$ -cuerpos.
- Integrador Taylor+JPL.
- Propagación de una región usando las ecuaciones variacionales.

Modelo para el movimiento del asteroide

Consideramos un problema restringido de $N + 1$ cuerpos, es decir, el **asteroide** es considerado como una **partícula de masa negligible** afectada por los 9 planetas, el Sol y la Luna.

El movimiento de los N cuerpos con masa no es modificado por la presencia del asteroide (se mueven de acuerdo con un problema gravitacional de N cuerpos (NBP)).

Ecuación de movimiento para el asteroide:

$$\ddot{X}_a = \sum_{j=1}^{11} \frac{Gm_j(X_j - X_a)}{r_{ja}^3}$$

Corrección JPL del modelo

Para corregir la imprecisión del modelo (debida pralmente. a efectos relativistas y J2) se puede considerar:

- JPL efemérides para los cuerpos principales.
- Integrador Taylor para el asteroide.

Comentarios:

- Se necesita el jet de derivadas de los planetas para la integración de la ecuación del asteroide.
- Se considera que en el jet de derivadas de los planetas sólo es relevante el efecto de gravitación mútua.

JPL efemérides

Efemérides: tabulación de posiciones y momentos de un cuerpo en determinados instantes de tiempo.

JPL Ephemerides DE405: Coeficientes de polinomios de interpolación (Chebyshev) a partir de los cuales se puede obtener la posición y velocidad del Sol, la Luna y los planetas
9 Diciembre de 1599 – 1 Febrero de 2200.

Principales efectos considerados en DE405:

- Interacción gravitacional entre la Luna, los planetas y el Sol.
- Relatividad general.
- Perturbaciones Newtonianas de algunos asteroides.
- Efectos debidos a la forma de la Tierra, la Luna y el Sol, ...

99942 Apophis

NEO cuya trayectoria se aproxima a la Tierra en repetidas ocasiones.

Está previsto que el próximo acercamiento se produzca el 13 de Abril de 2029.

e	0.191
i	3.331 deg
a	0.922 AU
P	323.5d



Incertidumbre en las condiciones iniciales

Información sobre observaciones de Apophis: web de NEODYS ^a.

Observaciones recientes ^b implican que la posición y la velocidad de Apophis a las 00:00h del 1 de Septiembre de 2006 són

x	0.5166128258669076E+00	0.6961955810635310E+00	-0.2443608670809208E-01
v	-0.1295180180760195E-01	0.1388132695417834E-01	-0.1047646475022484E-02

...una desviación standard respecto al semieje mayor $\sigma_a \approx 9,6 \times 10^{-9}$

...una desviación standard respecto a la anomalía media $\sigma_M \approx 1,08 \times 10^{-6}$.

Los datos anteriores implican que hay que tomar una caja de condiciones iniciales de 7 Km en la dirección tangencial a la órbita y de 3 Km en las direcciones ortogonales a la misma (en posición).

^a<http://unicorn.eis.uva.es/cgi-bin/neodys/neoibo?objects:Apophis>

^bGiorgini-Benner-Ostro-Nolan-Busch: "Predicting the Earth encounters of (99942) Apophis", Icarus 193(2008)

Propagación caja c.i.: ecs. variacionales

PVI: $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0.$

Sea $\phi_t(x)$ solución del PVI. Las ecs. variacionales de orden j son las ecuaciones diferenciales que satisface $\partial^j \phi_t(x) / \partial x^j.$

1as variacionales:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x} = Df(\phi_t(x)) \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x}.$$

2as variacionales:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \phi_t(x)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x} \right)^T D^2 f(\phi_t(x)) \left(\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial x} \right) + Df(\phi_t(x)) \frac{\partial^2 \phi_t(x)}{\partial x^2}.$$

...

Comentarios

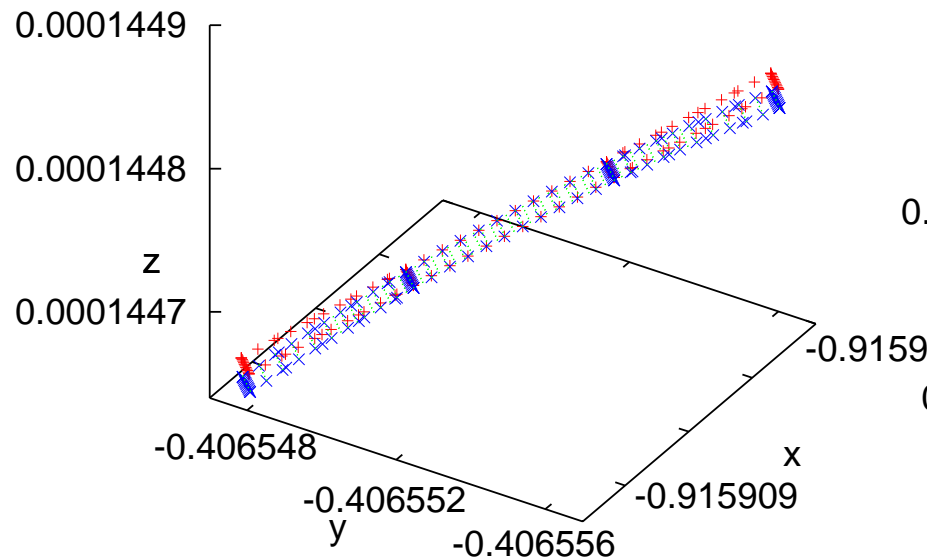
- Integramos las variacionales correspondientes al asteroide (Apophis).
- Usando simetrias del problema se puede reducir:
 - 1as variacionales: de 36 a 18 ecuaciones.
 - 2as variacionales: de 216 a 63 ecuaciones.
- Tiempo de CPU: Integración des del 1 Septiembre de 2006 hasta el 13 de Abril de 2029 (Intel(R) Xenon(R) CPU 2.66GHz).

Apophis (6 ecs.): 1,169 s.

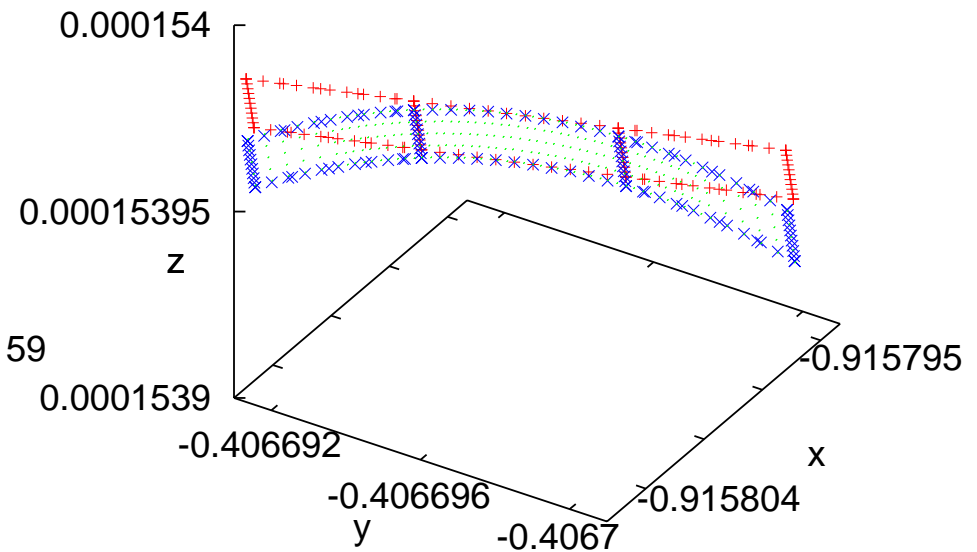
Apophis + 1as variacionales (24 ecs.): 1,572 s.

Apophis + 1as + 2as variacionales (87 ecs.) : 11,129 s.

Pasaje cerca de la Tierra (2029)



April 13th 2029 22:48 h

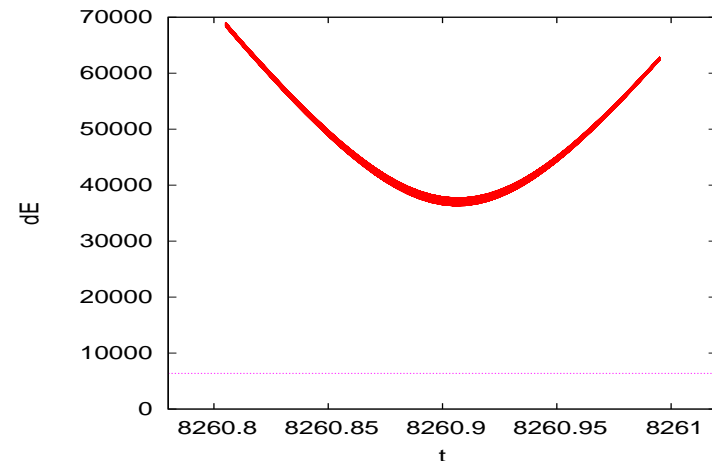
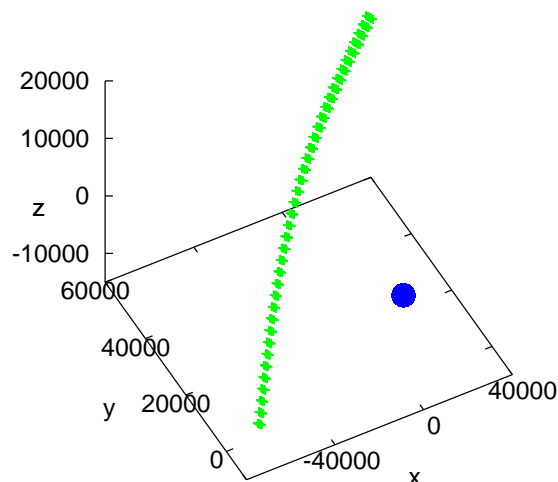
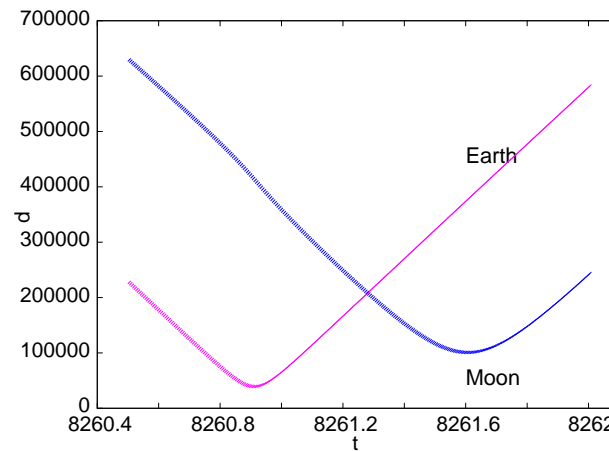


April 13th 2029 23:02 h

- Los resultados muestran que es necesaria la aproximación cuadrática para describir el pasaje de Apophis cerca de la Tierra (13 Abril 2029).
- Después del pasaje la dinámica refleja la gran dependencia respecto condiciones iniciales intrínseca del problema haciéndose difícil predecir el comportamiento de la caja de condiciones iniciales.

2029: No hay colisión!!! 2037: 🤪

- En el modelo estudiado, con las condiciones iniciales mencionadas, se puede ver que no hay colisión de Apophis con la Tierra.
- El acercamiento es de unos 36000 Km (10 veces mas cerca que la Luna!!!)



Integración validada

- Métodos intervalares.
- Aplicaciones al cálculo de la órbita de un asteroide (ej. Apophis).
- Conclusiones.

Aritmética intervalar

Consideramos el conjunto de intervalos reales

$$\mathbb{IR} = \{[a] = [a_l, a_u] \mid a_l, a_u \in \mathbb{R}, a_l < a_u\}.$$

Operaciones: $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, $\circ \in \{+, -, *, /\}$, definimos

$$\boxed{[a] \circ [b] = \{x \circ y \mid x \in [a], y \in [b]\}}$$

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= [a_l + b_l, a_u + b_u], & [a] - [b] &= [a_l - b_u, a_u - b_l], \\ [a] * [b] &= [\min(a_l b_l, a_l b_u, a_u b_l, a_u b_u), \max(a_l b_l, a_l b_u, a_u b_l, a_u b_u)], \\ [a]/[b] &= [a_l, a_u] * [1/b_u, 1/b_l], \text{ if } b_l > 0. \end{aligned}$$

- Sólo existe el inverso resp. $+$ y/o $*$ para $[a] = a \in \mathbb{R}$.
- $+$ y $*$ son asociativas t conmutativas pero...

$$\text{Propiedad subdistributiva: } [a] * ([b] + [c]) \subseteq [a] * [b] + [a] * [c]$$

Problemas al usar aritmética intervalar

Cualquier aritmética intervalar (AI) está afectada por **sobrestimaciones**, principalmente debidas al **Dependency Problem** y al **Wrapping Effect**.

Dependency problem

Dependency Problem: debido al uso de AI en las operaciones...

→ se tratan dos ocurrencias de la misma variable como variables diferentes.

→ el orden de las operaciones juega un papel.

Ejemplos:

- Claramente $x - x = 0$ para cualquier $x \in [1, 2]$.

Usando AI se tiene $[1, 2] - [1, 2] = [-1, 1]$.

- Claramente $x^2 - x \in [-1/4, 0]$ para $x \in [0, 1]$.

Usando AI directamente: $[0, 1] * [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$.

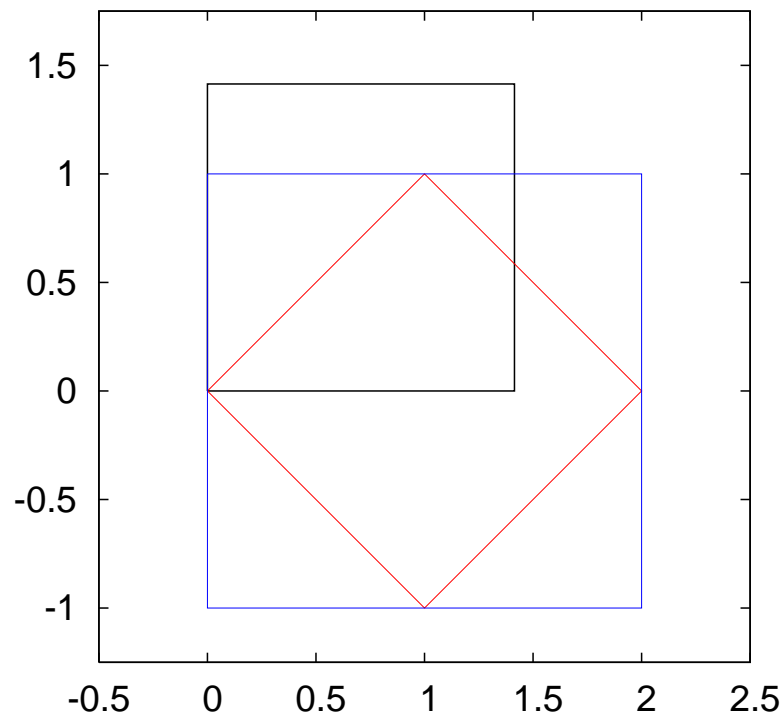
Reescribiendo $x^2 - x = x(x - 1)$: $[0, 1] * ([0, 1] - 1) = [-1, 0]$.

Dividiendo $[0, 1]$ en 10 partes iguales: $[-0,35; 0,1]$.

El “wrapping effect”

Wrapping Effect: debido a que se han de incluir conjuntos en intervalos n -dimensionales. Los métodos validados han de hacer frente al “wrapping effect” adaptando lo mejor posible las coordenadas al problema.

Ejemplo (Moore):



Consideramos $f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y, y - x)$. La imagen del cuadrado $[0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$ es el cuadrado rotado de vértices $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 0)$ y $(1, 1)$. Usando AI se obtiene $[0, 2] \times [-1, 1]$, cuadrado que dobla la dimensión.

Rounded AI

Los errores de representación se han de tener en cuenta en la aritmética redondeando por exceso (defecto) el extremo derecha (izquierdo) del intervalo.

$$[a] + [b] = [(a_l + b_l)_{\blacktriangledown}, (a_u + b_u)_{\blacktriangle}]$$

$$[a] - [b] = [(a_l - b_u)_{\blacktriangledown}, (a_u - b_l)_{\blacktriangle}],$$

$$[a] * [b] = [\min(a_l b_l, a_l b_u, a_u b_l, a_u b_u)_{\blacktriangledown}, \max(a_l b_l, a_l b_u, a_u b_l, a_u b_u)_{\blacktriangle}],$$

$$[a]/[b] = [a_l, a_u] * [1/b_u, 1/b_l], \text{ if } b_l > 0.$$

Un número real x se representa como un intervalo $[x] = [x_{\blacktriangledown}, x_{\blacktriangle}]$.

De esta manera, la aritmética intervalar permite acotar los errores de roundoff de las operaciones de manera automática.

Métodos intervalares para ODE's

- Algoritmo directo de Moore.
- Método del paralelepipedo.
- Método QR-Lohner.

Initial set value problem (ISVP)

Consideramos

$$\begin{cases} u' = f(u), \\ u(t_0) = u_0 \in \{u_0\}, \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$ y $\{u_0\}$ es un conjunto de \mathbb{R}^m .

Dado $h > 0$ queremos un conjunto $\{u_1\} \subset \mathbb{R}^m$ tal que

$$u(t_0 + h; u_0) \in \{u_1\} \text{ para todo } u_0 \in \{u_0\}.$$

Objetivo: El integrador validado debe calcular $\{u_1\}$ tan cercano como sea posible al conjunto

$$\{u(t_0 + h, u_0), u_0 \in \{u_0\}\}.$$

Diferentes posibilidades para afrontar el ISVP

En la literatura se encuentran principalmente dos aproximaciones:

- **Métodos intervalares:** Se caracterizan por representar los conjuntos con representaciones geométricas basadas en intervalos: intervalos, paralelepípedos, cuboides,...

Ventajas:

Rápidos,

Fácilmente se pueden introducir incertidumbres,

Generales: aplicables en casos no-analíticos.

- **Métodos Taylor-based :** Se caracterizan por representar los conjuntos como serie de Taylor respecto las incertidumbres iniciales.

Ventaja:

Precisión.

Algoritmo de Moore (i)

Los conjuntos ($\{ \}$) se representan por **intervalos** ($[]$)

Rec:

Para $u_0 \in \{u_0\}$, la expansión de Taylor de $u(t_0 + h; u_0)$ a orden n alrededor de $t = t_0$ es

$$u(t_0 + h; u_0) = T(u_0) + R(\xi; u_0),$$

donde

$$T(u_0) = u_0 + f(u_0)h + \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(u_0) \frac{h^n}{n!},$$

y

$$R(\xi; u_0) = \frac{d^n}{dt^n} f(u(\xi; u_0)) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

siendo $\xi \in [t_0, t_0 + h]$.

Algoritmo de Moore (ii)

Para **validar** la evaluación:

Si $\{u_0\} \subset [u_0]$, entonces

$$\boxed{T(\{u_0\}) \subset T([u_0])}$$

$$T(\{u_0\}) := \{T(u_0) | u_0 \in \{u_0\}\}$$

donde

$$T([u_0]) = [u_0] + f([u_0])h + \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f([u_0]) \frac{h^n}{n!}.$$

$$\boxed{R(\xi, u_0) \subset R([\hat{u}_0])}$$

donde $[\hat{u}_0]$ es un intervalo (caja) tal que $u(t; u_0) \subset [\hat{u}_0]$ para todo $t \in [t_0, t_0 + h]$ y para todo $u_0 \in [u_0]$.

Algoritmo de Moore (iii)

Rough enclosure procedure:

Para calcular $[\hat{u}_0]$ Moore sugirió el esquema iterativo

$$\begin{aligned}[\hat{u}_0^0] &= [u_0] + [\epsilon, \epsilon], \\ [\hat{u}_0^{k+1}] &= [u_0] + [0, h]f([\hat{u}_0^k]).\end{aligned}$$

En definitiva,

$$[u_1] = T([u_0]) + R([\hat{u}_0]),$$

nos da la solución al ISVP a tiempo $t_0 + h$.

Algoritmo de Moore (iv)

Inconvenientes:

- Paso de integración pequeño.

El procedimiento de “rough enclosure” obliga a pasos de Euler.

- Dependency problem.

$T([u_0])$ depende de la extensión intervalar de f .

- Wrapping effect.

El conjunto $\{T(u_0), u_0 \in [u_0]\}$ NO es un intervalo y se ha de incluir en $T([u_0])$.

⇒ Sobrestimaciones (desastre!!) [Show movie](#)

Métodos intervalares de primer orden

Notamos que

$$T(\{u_0\}) \subset T(m(u_0)) + \overbrace{DT([u_0])([r_0])}^{\text{“small” wrapping}},$$

donde $m(u_0)$ es el centro del intervalo $[u_0]$ y $[r_0] = [u_0] - m(u_0)$.

El algoritmo de Moore en forma centrada se escribe

$$[u_1] = T(m(u_0)) + DT([u_0])([r_0]) + [z_1], \quad (1)$$

donde $[z_1] = R([\hat{u}_0])$.

Idea: La 1a. ec. variacional proporciona un cambio lineal de coordenadas que permite representar mejor los conjuntos (se adapta a la geometría).

→ Métodos del paralelepípedo y QR -Lohner

Método del paralelepípedo

Los conjuntos se representan como paralelepípedos

$$p + A[r],$$

siendo $p \in \mathbb{R}^n$ (punto), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz) y $[r] \subset \mathbb{R}^n$ (intervalo).

Para $\{u_0\} = m(u_0) + A_0[\hat{r}_0]$, se ha de verificar

$$T(m(u_0)) + DT([u_0])A_0([\hat{r}_0]) + [z_1] \subset \{u_1\},$$

que, si se requiere $\{u_1\} = m(u_1) + A_1[\hat{r}_1]$, se puede escribir como

$$m(u_1) = T(m(u_0)) + m(z_1),$$

$$A_1 = m(DT([u_0])A_0),$$

$$[\hat{r}_1] = [B_1][\hat{r}_0] + [A_1^{-1}]([z_1] - m(z_1)).$$

($[B_1]$ tal que $DT([u_0])A_0 = A_1[B_1]$.)

[Show movie](#)

Método QR-Lohner

En general, las matrices A_1 del método del paralelepípedo tienden a ser singulares \Rightarrow problema al invertir (acumulación de errores).

Para resolver esto Lohner propuso representar los conjuntos como cuboides

$$p + Q[r],$$

siendo Q matriz ortogonal.

La iteración queda (conjunto inicial $m(u_0) + Q_0[\hat{r}_0]$):

$$m(u_1) = T(m(u_0)) + m(z_1),$$

$$Q_1 \text{ s.t. } Q_1 R_1 = A_1 = m(DT([u_0]Q_0)),$$

$$[\hat{r}_1] = R_1[B_1][\hat{r}_0] + [Q_1^{-1}]([z_1] - m(z_1)).$$

($[B_1]$ tal que $DT([u_0])Q_0 = A_1[B_1]$.)

Métodos intervalares de segundo orden

Rec:

Método directo: $[u_1] = T([u_0]) + [z_1]$.

Primer orden: $[u_1] = T(m(u_0)) + DT([u_0])A_0([\hat{r}_0]) + [z_1]$

Podemos calcular la aproximación de segundo orden. En el caso del paralelepípedo es

$$[u_1] = T(m(u_0)) + DT(m(u_0))A_0[\hat{r}_0] + \frac{1}{2}(A_0[\hat{r}_0])^t D^2T([u_0])(A_0[\hat{r}_0]) + [z_1].$$

Esta modificación garantiza una buena aproximación de la dinámica en el intervalo durante un tiempo más largo.

Resultados: 1er orden vs. 2o. orden

1er. orden	268.75 días
2o. orden	893.75 días

Cuadro 1: Tiempo máximo de integración obtenido con el método del paralelepípedo de primer y segundo orden el problema de Kepler Sol–Apophis ($h = 0,625$ días). **Incertidumbre** 10^{-6} AU.

1er. orden	632.5 días
2o. orden	1529.375 días

Cuadro 2: Tiempo máximo de integración obtenido para Apophis en el problema $(N + 1)$ -JPL usando el método del paralelepípedo de primer y segundo orden. **Incertidumbre** $\pm 5 \times 10^{-8}$ AU.

Conclusiones

Los métodos intervalares...

- son **rápidos** pero producen **grandes sobrestimaciones**.
- tratan de reducir la sobrestimación **adaptando coordenadas**.

Posible alternativa: métodos Taylor-based.

- Hemos visto que al tener en cuenta la dependencia respecto condiciones iniciales a orden 1 o 2 se mejora el resultado...
- Representar los conjuntos geoméricamente produce wrapping...

IDEA: Representar los conjuntos como series de Taylor a orden elevado respecto condiciones iniciales \Rightarrow métodos Taylor-based. Los conjuntos son incluidos en modelos de Taylor (p, I) , p polinomio, I intervalo que acota el error. Requieren representación geométrica para I pero permiten tratar con conjuntos no convexos.

Referências

CAPD'07: *Course given in Barcelona by P. Zgliczynski.*

<http://www.imub.ub.es/cap07/slides>.

CAP'08. *Course given in Barcelona by M. Berz and K. Makino.*

<http://www.imub.ub.es/cap08/> (slides not available but homepages links).

E.M. Alessi, A. Farrés, A. Jorba, C. Simó, A. Vieiro.

Efficient Usage of Self-Validated Integrators for Space Applications.

ESA report, 2008, Ariadna ID: 07/5202.